微分流形与黎曼几何
aka 微分流形及应用
Differenial Manifolds and Riemannian Geometry
aka Differential Manifold and its application

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院，北京航空航天大学
School of Mathematics and Systems Science, Beihang University

April 2, 2012

Chapter 3: 向量场与微分 Vector fields and Differention

线性空间和线性函数

Remark (线性空间)

记V为n维线性空间，基为e_i,任一元素$v = x^i e_i$.
基变换:$\hat{e}_i = Ae_j = a^j_i e_j$,记$A = (a^j_i), A^{-1} = (b^j_i)$
坐标变换$v = x^j e_j = \hat{x}^i \hat{e}_i$, $\hat{x}^i = (A^\tau)^{-1} x^j = b^i_j x^j$

Remark (线性函数空间$L(V;R)$)

记V^*为n维线性空间的对偶空间，基为δ^i,任一元素$\alpha = f_i \delta^i$.
基变换:$\hat{\delta}^i = B\delta^j = b^i_j \delta^j$,记$A = (a^j_i), B = (A^\tau)^{-1}$
坐标变换$\alpha = f_j \delta^j = \hat{f}_i \hat{\delta}^i$, $\hat{f}_i = (B^\tau)^{-1} f^j = Af_j = a^j_i f_j$.

线性空间的对偶

Remark (对偶配对)

给定V, V^*上的对偶基，$\langle \delta^i, e_j \rangle = \delta^i_j$,
基变换矩阵的关系$A = (a^j_i), B = (A^\tau)^{-1}$.

Remark (切空间对偶)

给定$T_p(M), T^*_p(M)$上的对偶基$\frac{\partial}{\partial x^i}, dx^i$，$\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j \rangle = \delta^i_j$,
基变换矩阵:$\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$
对偶基变换$d\hat{x}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} dx^j$, 即$B = (A^\tau)^{-1}$.

任一双线性函数给出一个配对。比如内积。

多重线性函数

Definition (多重线性函数)

$f: V_1\times V_2\cdots V_r\to R$对每个自变量是线性的，称为$V_1\times V_2\cdots V_r$上的$r$重线性函数，记为$L(V_1,\ldots,V_r;R)$.
基$e_{1i},e_{2i},\ldots,e_{ri}$,维数为$n_1n_2\ldots n_r$.

Definition (张量)

f是$V_1\times V_2\cdots V_r$上的r重线性函数，V_i是V或V^*之一，称f是一个张量。
$r=p+q$,其中p是V^*的个数，q是V的个数,称为(p,q)型张量。记为V^p_q或 T^q_p.

Remark (协变与反变)

$L(V,R)$坐标对应变换与基变换相同，称为协变；
$V=L(V^*,R)$坐标对应变换与基变换为转置逆关系，称为反变；
p为反变阶数，q为协变阶数。

张量的例子

- (0,0)：实数
- (1,0)：向量(切向量)
- (0,1)：线性函数(余切向量df)
- (0,2)：双线性函数，(0,n) 多重线性函数(det)
- (1,1)：线性变换

Definition (张量积)

f是(p_1,q_1)张量，g是(p_2,q_2)张量，则
$f\otimes g(\alpha^1,\ldots,\alpha^{p_1+p_2},v_1,\ldots,v_{q_1+q_2})=$
$f(\alpha^1,\ldots,\alpha^{p_1},v_1,\ldots,v_{q_1})\cdot g(\alpha^{p_1+1},\ldots,\alpha^{p_1+p_2},v_{q1+1},\ldots,v_{q_1+q_2})$
它是(p_1+p_2,q_1+q_2)型张量。

Proposition

张量积满足分配律和结合律。$(f+g)\otimes h=f\otimes h+g\otimes h$,
$(f\otimes g)\otimes h=f\otimes(g\otimes h)$

张量的基表示

Proposition (张量的基)

设V,V^*上基为e_i,δ^i,则(p,q)上的张量是n^r维空间，f在基下的坐标为

$$f^{i_1i_2\cdots i_p}_{j_1j_2\cdots j_q}=f(\delta^{i_1},\ldots,\delta^{i_p},e_{j_1},\ldots,e_{j_q})$$

.
坐标变换:

$$\hat{f}^{i_1i_2\cdots i_p}_{j_1j_2\cdots j_q}=b^{i_1}_{k_1}\cdots b^{i_p}_{k_p}a^{l_1}_{j_1}\cdots a^{l_q}_{j_q}f^{k_1k_2\cdots k_p}_{l_1l_2\cdots l_q}$$

可用坐标来定义张量(Ricci).

Remark (基的张量积表示)

$f=f^{i_1i_2\cdots i_p}_{j_1j_2\cdots j_q}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes\delta^{j_1}\otimes\cdots\otimes\delta^{j_q}$.

***空间的张量积

Definition (空间的张量积)

向量空间V,W的张量积是由$v\otimes w$生成的向量空间。v,w看成V^*,W^*上线性函数。记为$V\otimes W$

Proposition

- $V\otimes W$是$dim(V)\cdot dim(W)$维向量空间
- $V\otimes W\cong L(V^*,W^*;R)$

Proposition (张量积空间的特征)

任一V,W,X向量空间；如果$A:V\times W\to X$是双线性映射，存在唯一线性映射$\hat{A}:V\otimes W\to X$ 满足

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ V\otimes W \arrow[ur, "\hat{A}"'] & \end{tikzcd}$$

张量代数

Definition (张量代数)

记$T(V) = \bigoplus_{p,q\geq 0} T^q_p$,向量的加法，数乘和张量积构成一个代数。
特别它是分次代数。

Remark

特别记协变张量代数: $T(V) = \bigoplus_{q\geq 0} T^q_0$;
反变张量代数: $T(V^*) = \bigoplus_{p\geq 0} T^0_p$;

Definition (对称张量)

任一$(0,k)$阶协变张量是对称的 $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f\circ\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, σ_k是k阶置换群的任一元素。记为$\Sigma^K(V)$;

也有反对称张量。

度量张量

Remark (内积张量)

$\langle,\rangle$是对称(正定)双线性函数，即二阶协变张量。记为g
设基为e_i，对偶基δ^i; $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $g = g_{ij}\delta^i\otimes\delta^j$. (g_{ij})是对称矩阵。
记g^{ij}为g_{ij}的逆矩阵，$g^\sharp = g^{ij} e_i\otimes e_j$是二阶反变张量。称为$g$的共轭张量。

切空间上黎曼度量$g_{ij}dx^i\otimes dx^j$

Proposition

- g给出$V\to V^*$的一个同构 $F(v) = g(v,\cdot)$.
- 指标上升下降: h_{ij},$h^j_i = h_{ik}g^{kj}$,$h^i_j = h_{kj}g^{ki}$,$h^{ij} = h_{kl}g^{ki}g^{lj}$

切丛

Definition (切丛 Tangent bundle)

给定光滑流形M，定义流形的切丛$TM = \coprod_{p\in M} T_pM$.
每一点记为(p, X), 自然投射$\pi : TM\to M, \pi(p, X) = p$
$(p, X), X_p, X$都指p点的切向量。

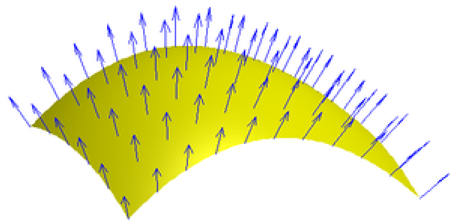
Theorem (切丛是光滑流形)

设M是n维光滑流形，则TM是$2n$维光滑流形，且$\pi : TM\to M$是光滑映射。

Corollary

$F : M\to N$是光滑映射，则$F_* : TM\to TN$是光滑映射。

切向量场



Definition (切向量场 Tangent vector fields)

给定光滑流形M，定义流形的切向量场$Y : M\to TM$是一个连续映射，且满足$\pi\circ Y = Id_M$.
特别光滑映射是光滑向量场。Y也称为π的一个截面。*(section)*

Remark

坐标表示$Y(p) = Y^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.
Y是光滑的当且仅当坐标函数Y^i是光滑的。

余切丛

Definition (余切丛 cotangent bundle)

给定光滑流形M，定义流形的余切丛$T^*M = \coprod_{p\in M} T_p^*M$.
每一点记为(p,ω), 自然投射$\pi : T^*M \to M, \pi(p,\omega) = p$

Definition (余切向量场 cotangent vector fields)

给定光滑流形M，定义流形的余切向量场$\omega : M \to T^*M$是一个连续映射，且满足$\pi \circ \omega = Id_M$.

Proposition

- T^*M是$2n$维光滑流形，且$\pi : TM \to M$是光滑映射。
- $F : M \to N$是光滑映射，则$F^* : T^*N \to T^*M$是光滑映射。
- $\omega = \omega_i dx^i$是光滑的当且仅当坐标函数ω_i是光滑的。

定义

Definition (*向量丛)**

给定光滑流形E, M,光滑映射$\pi : E \to M$是满射，V是k维向量空间；称$E \to M$是M上的阶为k的向量丛，如果

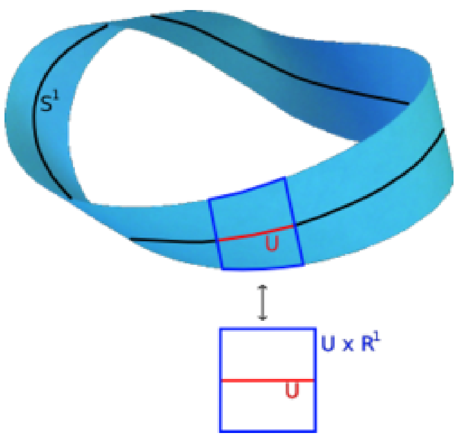
1. $E_p = \pi^{-1}(p)$是个与V的同构,
2. 任一点p存在局部平凡化映射$\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$是光滑同胚, 满足

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Remark

E称为丛空间，M是底空间，π是丛投影，E_p是纤维。
两个局部平凡化映射的过渡函数：$\tau : U \cap V \to GL(k, R)$.

例子



EXAMPLE (乘积丛)

$E = M \times R^k$,称为平凡丛。即存在全局平凡化映射。

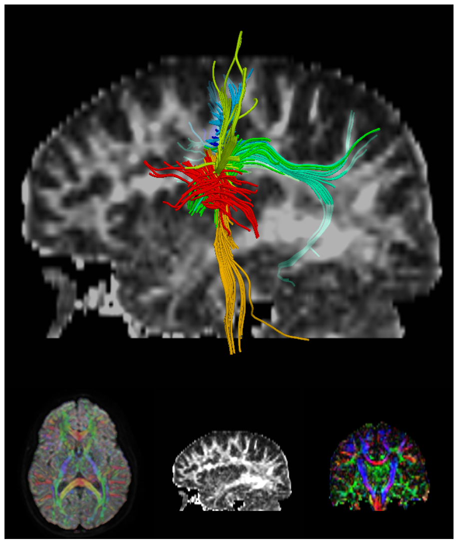
EXAMPLE (Möbius bundle)

$E = I \times \mathbb{R}/\sim \to S^1$.
$k = 1$称为线丛。

EXAMPLE

切丛和余切丛。
张量丛：$T_l^k(M) = \coprod_p T_l^k(T_pM)$.

Diffusion Tensor Imaging



***光滑截面

Definition (section)

光滑映射$s: M \to E$满足$\pi \circ s = Id_m$，称为(E, M, π)的一个光滑截面。记为$s \in \Gamma(E)$. 特别有定义在开集上的局部截面。

Definition (标架场frame)

如果存在$s_1, s_2, \ldots, s_k$是线性无关的(即在每一点$p \in M$,$s_i(p)$是E_p的基),称$\{s_i\}$是M上一个标架场。
类似有局部标架场。

Remark

局部平凡化对应局部标架场。
TM上$\frac{\partial}{\partial x^i}$是局部标架场，$T^*M$上$dx^i$是局部标架场(又称为*coframe*).
全局标架场对应平凡向量丛。

丛映射

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ X_1 \arrow[r, "g"'] & X_2 \end{tikzcd}$$

Definition (丛映射)

(F, f)是向量丛$(E, M, \pi) \to (F, N, \pi')$的丛映射，如果 $\pi' \circ f = F \circ \pi$,且$F|_{E_p}$是线性的。
特别$M = N$时，称F为M上的丛映射。

Remark

- 可以定义丛同构.
- 切映射,余切映射是丛映射。
- 三维欧几里德空间的叉积是TR^3到TR^3的丛映射。 积是TR^3到$R^3 \times R$的丛映射。

范畴

Definition (范畴 category)

范畴$\{C, Hom\}$有一类对象X(*objects*),对象间同态$f = Hom_C(X, Y)$，及组合同态$(f, g) = g \circ f$; 且满足

1. 同态的结合律 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,
2. 存在单位同态：$f \circ Id = Id \circ f$

特别f称为同构如果$f \circ g = Id, g \circ f = Id$.

EXAMPLE

- 集合和集合映射 *SET*
- 拓扑空间和连续映射 *TOP*
- 光滑流形和光滑映射*SM*, 向量丛和丛映射*VB*
- 向量空间和线性映射*VECT*
- 群和同态*GROUP*, 李群和李同态*LIE*

函子

Definition (FUNCTOR)

C, D是范畴，$\mathcal{F}: C \to D$是协变函子, 如果满足

1. $X \in C, \mathcal{F}(X) \in D, f \in Hom_C(X, Y)$;
2. $\mathcal{F}(f) \in Hom_D(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(Y))$.
3. $\mathcal{F}(Id) = Id_{\mathcal{F}(X)}; \mathcal{F}(g \circ h) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(h)$

Remark

- 类似可以定义反变函子。
- 切函子:协变函子 $SM \to VB$ 余切函子：反变函子!
- 代数拓扑：$TOP \to GROUP$ 同调群，同伦群*

切向量场

Definition (切向量场 Tangent vector fields)

给定光滑流形M，定义流形的切向量场$Y: M \to TM$是一个连续映射，且满足$\pi \circ Y = Id_M$.
Y也称为切向量丛的一个截面。*(section)*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}U \subset TM \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \phi(U) \times R^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ U \subset M \arrow[r, "\phi"'] & \phi(U) \end{tikzcd}$$

Proposition

坐标表示$Y(p) = Y^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p.\hat{Y}(x) = (x^1, \ldots, x^n, Y^1(x), \ldots, Y^n(x))$.
Y是光滑的当且仅当坐标函数Y^i是光滑的。$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$是光滑向量场。

切向量场的性质

Proposition (局部扩充)

给定M上的点$p, X_p \in T_pM$，存在光滑切向量场$\tilde{X}$，满足$\tilde{X}_p = X$.
特别可以在局部U上定义切向量场。

Proof.

取局部邻域U, 光滑bump函数φ的支撑集包含于U,令$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$,

$$\tilde{X}(q) = \begin{cases} \varphi(q)X^i\frac{\partial}{\partial x^i}(q) & q \in U \\ 0 & q \notin supp\varphi \end{cases} \tag{1}$$

□

Proposition (切向量场空间)

记$\mathcal{T}(M)$为M上光滑向量场。$\mathcal{T}(M)$是向量空间;
$(aY + bz)_p = aY_p + bZ_p$.也是环$C^\infty(M)$上的模。$fY(p) = f(p)Y_p$.

切向量场作用于函数

Definition

给定M上光滑切向量场Y,光滑函数f, 定义$Yf(p) = Y_pf \in C^\infty(M)$.
特别定义在局部U上决定。

Proposition (光滑判定)

给定M上切向量场Y。Y是光滑的当且仅当Yf是光滑的，对任一光滑函数f。

Proposition (切向量场是导子)

定义：线性映射$F: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$满足$F(fg) = fF(g) + gF(f)$ 称为导子。 记$\mathcal{T}(M)$为M上光滑向量场。
则$C^\infty(M)$上导子与$\mathcal{T}(M)$一一对应。

切向量场pushforward

Remark

给定M上光滑切向量场Y,光滑映射$F: M \to N$, 定义$F_*(Y_p)(f)_{F(p)} = Y(f \circ F)|_p$ 给出切向量的*pushforard.*
向量场? $q \notin F(M)$? $F(p_1) = F(p_2)$?

Definition (F相关向量场)

给定M上切向量场Y，N上切向量场Z，光滑映射$F: M \to N$,称Y, Z是F相关的如果$F_*(Y_p) = Z_{F(p)}$.

Proposition (F相关判定)

Y与Z是F相关的当且仅当任一$f \in C^\infty(N)$满足 $Y(f \circ F) = (Zf) \circ F$

Proposition (存在性)

如果F是光滑同胚,则任一M上向量场存在唯一N上F-相关向量场. 记为F_*Y.

李括号

Remark

给定M上光滑切向量场V, W，VW是否光滑向量场?
反例：R^2 上$V = \frac{\partial}{\partial x}, W = \frac{\partial}{\partial y}$，$f(x, y) = x, g(x, y) = y$,乘积法则不对!

Definition (李括号)

给定M上切向量场V, W，任意光滑函数f，定义李括号$[V, W]f = VWf - WVf$。
$[V, W]$是光滑向量场(导子).
局部定义$[V, W]_p(f) = V_p W(f) - W_p V(f)$

Proposition (局部计算)

局部坐标表示$V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}, W = W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则
$[V, W] = (V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i \frac{\partial V^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}$
简记为$[V, W] = (VW^j - WV^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$. 特别$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$.

李括号性质

EXAMPLE

$V = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z}; W = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$,
$[V, W] = -\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}$

Proposition (李括号性质)

- 双线性
- 反对称$[V, W] = -[V, W]$
- *Jacobi*恒等式 $[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X, [V, W]] = 0$
- $[fV, gW] = fg[V, W] + (fVg)W - (gWf)V$.

Proposition (李括号自然性)

设$F : M \to N$, $V_1, V_2 \in \mathcal{T}(M)$,$W_1, W_2 \in \mathcal{T}(N)$, 如果$(V_i, W_i)$是$F$相关，
则$[V_1, V_2]$与$[W_1, W_2]$是F相关.
特别同胚保持李括号。$F_*[V, W] = [F_*V, F_*W]$.

李代数

Definition (李代数)

向量空间$\mathfrak{g}$上映射$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, (X, Y) \to [X, Y]$,满足

- 双线性
- 反对称$[V, W] = -[V, W]$
- *Jacobi*恒等式 $[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X, [V, W]] = 0$

称$\mathfrak{g}$, []是个李代数。[]又称为*Poisson*括号。

Definition (李代数同态)

线性映射$A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$，满足$A[X, Y] = [AX, AY]$.
特别有李代数同构。

EXAMPLE

$\mathcal{T}(M)$; $(R^3, \times)$ *Abelian*交换李代数$[A, B] = 0$.
矩阵$M(n, R)$，$[A, B] = AB - BA$， 记为$\mathfrak{gl}(n, R)$或$\mathfrak{gl}(R^n)$.

余切向量场

Definition (余切向量场 cotangent vector fields)

给定光滑流形M，定义流形的余切向量场$\omega : M \to T^*M$是一个连续映射，且满足$\pi \circ \omega = Id_M$.
ω也称为余切向量丛的一个截面。*(section)*,又称微分形式 *1-forms*.

Proposition

坐标表示$\omega(p) = \omega_i(p)dx^i_p$. $\omega_i(p) = \omega_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$
ω是光滑的当且仅当坐标函数ω_i是光滑的;当且仅当对任意光滑切向量场X, $< \omega, X >$是光滑的。dx^i是光滑*1-form*.
记$\mathcal{T}^*(M)$为M上光滑*1-form*, $\mathcal{T}^*(M)$是向量空间, 也是环$C^\infty(M)$上的模。$f\omega(p) = f(p)\omega(p)$

函数的微分

Remark

R^n上函数f, 梯度场$\nabla f = grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i}$.
是否向量场? 坐标变换不是! 例子$f(x, y) = x^2$.

Definition (函数的微分)

任一光滑函数$f : M \to R$,定义微分为$df_p(X_p) = X_p f$.
df是光滑1-形式。特别dx^i是光滑1-形式。$\{dx^i\}$组成coframe.

Remark

$f_* : TM_p \to TR_{f(p)}$与df在p点一致， $TR_{f(p)} \cong R$.
余切向量的几何解释:
微分的几何解释： $f(p+v) - f(p) \approx \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)v^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i(v) = df_p(v)$

微分的性质***

Proposition

- 线性: $d(af + bg) = adf + bdg$
- 乘积法则: $d(fg) = fdg + gdf, d(f/g) = (gdf - fdg)/g^2, g \neq 0$
- 复合: $d(h \circ f) = (h' \circ f)df$
- $df = 0 \Leftrightarrow f \equiv c$

Proposition (沿曲线的导数)

$r : I \to M$ 是光滑曲线， $f : M \to R$是光滑函数，导函数$(f \circ r)'(t) = df_{r(t)}(r'(t))$.

Proof.

$df_{r(t_0)}(r'(t_0)) = r'(t_0)f = (r_* \frac{d}{dt}|_{t_0})f = \frac{d}{dt}|_{t_0}(f \circ r) = (f \circ r)'(t)$ □

$(f \circ r)'(t)$的两种意义：数和切向量。

诱导余切向量场***

Definition (pushback)

给定$G : M \to N$,N上余切向量场ω,有$G^* : T^*N \to T^*M : G^*(\omega_p)(X) = \omega_p(G_* X_p)$,
定义; $(G^*(\omega))(p) = G^*(\omega_G(p))$.

Theorem

N上余切向量场ω是光滑的，则$G^*(\omega)$也是光滑的。

Lemma

给定N上光滑函数f， $G : M \to N$, $\omega \in \mathcal{T}^*(N)$, 有
$G^*df = d(f \circ G)$; $G^*(f\omega) = (f \circ G)G^*\omega$.

$\boxed{\text{Theorem PROOF:}}$ $G^*\omega = G^*(\omega_i dy^i) = (\omega_i \circ G)d(y^i \circ G)$

诱导1形式的计算***

微分形式的不变性 $G^*\omega = G^*(\omega_i dy^i) = (\omega_i \circ G)d(y^i \circ G) = (\omega_i \circ G)dG^i$

EXAMPLE

映射 $G : R^3 \to R^2, G(x, y, z) = (u, v) = (x^2 y, y \sin z)$, $\omega = udv + vdu$.
$G^*\omega = (u \circ G)d(v \circ G) + (v \circ G)d(u \circ G)$
$G^*\omega = 2xy^2 \sin z dx + 2x^2 y \sin x dy + x^2 y^2 \cos z dz$

EXAMPLE (坐标变换)

$Id : (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$;
$xdy - ydx = Id^*(xdy - ydx) = (r\cos\theta)d(r\sin\theta) - (r\sin\theta)d(r\cos\theta)$
$xdy - ydx = r^2 d\theta$

定义

Remark (欧几里德空间方向导数)

给定V, W方向，$D_V W(p) = \frac{d}{dt} W_{p+tV} = \lim_{t\to 0} \frac{W_{p+tV} - W_p}{t}$;
$D_V W(p) = VW^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$
推广到流形：$W_{p+tV} - W_p$无意义!!! 利用微分同胚。

Definition (向量场的李导数)

给定V, W为M上光滑向量场，记θ为V生成的流，定义李导数
$\mathcal{L}_V W_p = \frac{d}{dt}|_{t=0} (\theta_{-t})_* W_{\theta_t(p)} = \lim_{t\to 0} \frac{(\theta_{-t})_* W_{\theta_t(p)} - W_p}{t}$.

Remark

$\mathcal{L}_V W$是光滑向量场。且与欧几里德空间方向导数定义一致。

积分曲线***

Definition (Integral curves)

给定光滑曲线$r : I \to M$，流形上光滑切向量场$Y : M \to TM$，
称r是Y的一条积分曲线，如果
$r'(t) = Y(r(t)), t \in I$.
特别：设 $0 \in I$，记$r(0) = p$为曲线的起点。

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "\tilde{r}"'] & M \arrow[d, "Y"] \\ & TM \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, "r"] \arrow[d, "i"'] & M \arrow[d, "Y"] \\ TI \arrow[r, "r_*"'] & TM \end{tikzcd}$$

Remark

- $r_* \circ i$可以看作$\tilde{r}$一条TM中曲线。称为r的提升。
- 局部存在唯一。

切向量场生成的流***

Remark

给定M上光滑切向量场Y,任一点存在唯一一个积分曲线$\theta^p : R \to M$.
$\theta'(t) = Y(\theta^p(t))$.
定义：$\theta_t : M \to M; \theta_t(p) = \theta^p(t)$, 给出$M$的一个同胚。
特别$\theta_s \circ \theta_t(p) = \theta_{s+t}(p)$。

Definition (全局流，单参数变换群)

给定光滑流形M。定义：光滑映射 $\theta : R \times M \to M$,满足
$\theta(0, p) = p; \theta(t, \theta(s, p)) = \theta(s + t, p)$. 又称为$R$在流形上的左作用。

Remark

- θ_t是光滑同胚。
- θ^p是点p的轨道，M由不相交的轨道组成。

流诱导的向量场***

定义：$Y(p) = \theta'(0)$, 称为流的无穷小生成元(向量场).

Theorem

给定全局流$\theta : R \times M \to M, Y(p) = \theta'(0)$是一个光滑向量场，且$\theta^p$是它的积分曲线。

Proof.

- Y是光滑的；$Yf(p) = \theta'(0)f = \frac{d}{dt} f \circ (\theta^p) = \frac{\partial}{\partial t} f(\theta(t, p))$.
- 积分曲线。要证$\theta'(t) = Y(\theta^p(t))$
  给定$q = \theta^p(t_0)$,要证$\theta^{p\prime}(t_0) = V_q$.
  $\theta^q(t) = \theta^p(t + t_0)$,
  $V_q f = \theta^{q\prime}(0) f = \frac{d}{dt} f \circ \theta^q = \theta^{p\prime}(t_0)$

$\square$

向量场诱导的局部流

Theorem (局部流，ODE定理)

任一光滑向量场Y，存在唯一的极大局部流$\theta : D \subset R \times M \to M$,它的无穷小生成元是$Y$,且

- θ^p是唯一极大积分曲线
- θ_t是$M_t = (p : (t,p) \in D)$上的微分同胚。
- $(\theta_t)_* Y(p) = Y(\theta_t(p))$, 称$Y$是关于$\theta$不变的。

Remark

M是紧致的光滑流形，任一光滑向量场诱导一个全局流。
时间依赖的向量场$V : R \times M \to TM$诱导时间依赖的局部流。

李导数与李括号

Theorem

$\mathcal{L}_V W = [V, W] = VW - WV.$

$\boxed{\text{Outline:}}$ $V = \frac{\partial}{\partial x^1}$, $\theta = (x^1 + t, x^2, \ldots, x^n)$
$(\theta_{-t})_* W_{\theta_t(p)} = W^i(x^1 + t, x^2, \ldots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$
$\mathcal{L}_V W = \frac{\partial W^i}{\partial x^1}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$

Proposition

- $\mathcal{L}_V W = -\mathcal{L}_W V$
- $\mathcal{L}_V[W, X] = [\mathcal{L}_V W, X] + [W, \mathcal{L}_V X]$
- $\mathcal{L}_{[V,W]} X = \mathcal{L}_V \mathcal{L}_W X - \mathcal{L}_W \mathcal{L}_V X$
- $\mathcal{L}_V(fW) = (Vf)W + f\mathcal{L}_V W$

方向导数与平行移动

Remark

- 方向导数：给定V, W 方向,
  $D_V W(p) = \frac{d}{dt} W_{p+tV} = \lim_{t\to 0}\frac{W_{p+tV} - W_p}{t}$;
  推广到流形：$W_{p+tV} - W_p$无意义!!!
- 李导数: 利用微分同胚。$\theta_*^{-t} W_{p+tV} - W_p$.
  与局部流有关；不是方向导数!
- 欧几里德空间的方向导数：平行移动$T_{p+tV}M \to T_pM$
  沿任一曲线移动。
- 测地线：光滑曲线的二次导数与坐标卡有关；$(\cos t, \sin t) \sim (1, \theta)$;

定义

Definition (仿射联络connection)

定义映射$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$,记为$(x, y) \to \nabla_X Y$,满足

1. $\nabla_X Y$对X是关于光滑函数的线性映射；
2. $\nabla_X Y$对Y是关于R的线性映射；
3. 乘积法则：$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

称为$\nabla_X Y$是Y在X方向的共变导数。

Remark

李导数不是联络。
联络不是张量场。

共变导数的局部性

Proposition (共变导数局部性)

$\nabla_X Y|_p$由X, Y在p的局部值决定。即 $\nabla_X Y|_p = 0$仅当X或Y在p点邻域为零。

Proof.

设Y在邻域U上为零；构造截断函数ϕ的支集包含于U.有$\nabla_X(\phi Y) = 0$，$\nabla_X(\phi Y) = X(\phi)Y + \phi\nabla_X Y = 0$,$\nabla_X Y|_p = 0$. □

Proposition (共变导数方向性)

当X在p点为零，$\nabla_X Y|_p = 0$。

$\boxed{\text{PROOF:}}$ $\nabla_X Y = \nabla_{X^i\partial_i} Y = X^i \nabla_{\partial_i} Y|_p = 0$

Christoffel函数和存在性

Definition (Christoffel符号)

给定M上局部标架场E_i,定义$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$
Γ_{ij}^k称为联络在标架场下的*Christoffel*符号。一共有n^3个光滑函数。

局部表示： $\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k$

Theorem (联络的存在性)

任一给定光滑流形M上存在仿射联络。

- 欧几里德联络:$\nabla_X Y = XY^i\partial_i$
- 任一具有全局坐标卡的流形上的联络和n^3个光滑函数Γ_{ij}^k一一对应。

$\boxed{\text{PROOF:}}$ 构造单位分解(ψ^a, U^a),
定义$\nabla_X Y = \sum_a \psi^a \nabla_X^a Y$,验证其为联络。(乘积法则!)

张量场的共变导数***

Definition

定义联络$\nabla_X T_r^s \in T_r^s$，满足

- $\nabla_X f = X(f)$,
- $\nabla_X \omega(Y) = X(\omega(Y)) - \omega\nabla_X Y$
- $\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X T$

局部表示 $\nabla_X \omega = (X^i\partial_i\omega_k - X^i\omega_j\Gamma_{ij}^k)dx^k$.

Definition (全共变导数)

定义:$\nabla : T_r^s(M) \times T(M) \to C^\infty(M)$, $\nabla(T, X) = \nabla_X T$,$\nabla T$称为全共变导数，值是一个$(s+1, r)$阶张量场。

任一函数f,$< \nabla f, X >= \nabla_X f =< df, X >$,
共变Hessian: $\nabla\nabla f(X, Y) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)f$

沿曲线的共变导数

Remark (沿曲线的向量场)

给定曲线$r : I \to M$, 沿曲线的向量场$V_r : I \to TM$，满足$V_r(t) \in T_{r(t)}M$. $r'(t)$是一个。
特别给定向量场$V : M \to TM$,可定义$V_r = V \circ r$. V称为V_r的可扩充向量场。

Theorem (沿曲线的共变导数)

给定∇为M上联络，对任一光滑曲线r, 决定一个唯一的导数算子$D_t : V_r \to V_r$. 满足

- 线性；$D_t(aV_r + bW_r) = aD_t V_r + bD_t W_r$
- 乘积法则：$D_t(fV_r) = f'(t)V_r + fD_t V_r$
- 如果存在可以扩充的向量场V,$D_t V_r = \nabla_{r'(t)} V$.

称$D_t V_r$为V_r沿r的共变导数。

测地线

Definition (测地线)

光滑曲线r称为测地线(关于联络∇)，如果$D_t r' = 0$

Theorem (测地线存在唯一性定理)

给定流形M及联络∇，任一点$p \in M$,任一切向量$V_p \in T_pM$，存在唯一一条测地线$r : I \to M$ 满足$r(0) = p, r'(0) = V_p$.

$\boxed{\text{Outline:}}$ 给出局部坐标卡,$r(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$，$V(t) = V^i\partial_i$
局部表示$D_t V = \dot V^i\partial_i + V^i\nabla_{r'}\partial_i$
测地线方程$\ddot x^k(t) + \dot x^i(t)\dot x^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0$
ODE的存在唯一定理可证。
$\boxed{\text{特别:}}$ 欧几里德空间的测地线是直线。

平行移动

Remark (曲线的平行向量场)

如果$D_t V \equiv 0$,称V沿r平行。特别有流形上的平行向量场，满足$\nabla V \equiv 0$.
欧几里德空间平行向量场满足：坐标为常数。

Theorem (向量的平行移动)

给定曲线$r : I \to M$,任一$p \in M$, $V_p \in T_p(M)$,存在唯一的沿r的平行向量场 V，满足$V(0) = V_p$.

$\boxed{\text{Outline:}}$ 设存在一个坐标卡包含全部曲线；方程为 $\dot V^k + V^i\dot r^j\Gamma_{ij}^k = 0$;
线性ODE方程组的解是全局存在唯一的，所以存在唯一的平行向量场。
如果仅仅有局部坐标卡，可以不断延伸得到唯一的平行向量场。

Remark

给定曲线r，可定义切空间同构：$P_{0t} : T_pM \to T_{r(t)}M$;
特别$D_t V_p = \lim_{t\to 0} \frac{P_{0t}^{-1}V(t) - V_p}{t}$

黎曼度量

Definition

给定光滑流形M，g是上面的一个正定对称的二次协变张量场(二次形式), 称为一个黎曼度量。满足

- $g(X, Y) = g(Y, X)$
- $g(X, X) > 0$

称(M, g)是黎曼流形。简记为$\langle X, Y\rangle_g$.
局部坐标表示 $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, 由对称性可简记为 $g = g_{ij}dx^i dx^j$ 。

Proposition

- g赋予切空间一个积。可以定义长度$|X|^2 = \langle X, X\rangle$，切向量夹角, 正交基。
- 黎曼流形上存在局部正交标架场；(Gram-Schmidt 算法)

黎曼等距。存在微分同胚$F : M \to N$，使得$F^*g_N = g_M$.称M, N等距的，
黎曼几何研究等距变换下的不变量。

例子

EXAMPLE (欧几里德空间)

$g = \delta_{ij}dx^i dx^j = \sum_i d(x^i)^2$,
二维极坐标变换:$g = dx^2 + dy^2 = d(r\cos\theta)^2 + d(r\sin\theta)^2 = dr^2 + r^2d\theta^2$.

EXAMPLE (黎曼子流形)

设浸入子流形$i : M \to R^n$,定义诱导度量
$g_M(X, Y) = i^*g(X, Y) = g(i_*X, i_*Y) = g(X, Y)$. 注意$X, Y$是$M$上切向量。
球面的诱导度量$\breve g = g|_{S^n}$.

EXAMPLE (图流形)

给定映射$f : U \in R^n \to R$, 图流形$\Gamma : F(x) = (x, f(x)) \subset R^{n+1}$, 诱导度量$F^*(g) = F^*(\sum_i^{n+1}(dx^i)^2) = \sum_i^n(dx^i)^2 + df^2$
二维球面局部表示$\breve g = du^2 + dv^2 + (d\sqrt{1 - u^2 - v^2})^2$.

切空间与余切空间的诱导同构

Definition (同构)

定义：$g^\flat: TM \to T^*M$, $g^\flat(X)(Y) = g(X,Y)$，记为$X^\flat$.
$g^\flat$是线性同构。
定义: $g_\sharp: T^*M \to TM$ 为以上映射的逆映射, $g_\sharp(X^\flat) = X$.

Remark

局部表示$X = X^i\partial_i, g = g_{ij}dx^i dx^j$,
$X^\flat = g_{ij}X^i dx^j$,称为指标下降；记为$X_i = g_{ij}X^i$;
记$g^\sharp$的矩阵表示$g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$, $\omega = \omega_i dx^i$,
$\omega^\sharp = g^{ij}\omega_i\partial_j$,称为指标上升；$\omega^i = g^{ij}\omega_i$.

以上操作可以对任何张量进行。特别$gradf = df^\sharp$.

推广

Theorem

任一光滑流形存在光滑度量。

Remark

- 伪黎曼流形：$g(X,Y)$对称非奇异。
  $Lorentz$度量：$g = d(x^i)^2 - (dt)^2$
- 奇异黎曼流形：g定义于TM的子空间；
  控制论：M与一个有赖于控制参数的向量场；
- $Finsler$ 度量：$F: TM \to R$定义一个范数$(norm)$.
  多复分析

相关联络

Definition (度量相容联络)

黎曼流形上的联络满足$\nabla_X g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.
记为$\nabla g \equiv 0$.

Proposition

平行向量场保持积。
特别平行移动给出切空间的等距变换。

Definition (对称联络)

定义联络的挠张量：$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$.
如果$\tau \equiv 0$,称联络为对称的或无挠的。

局部表示: $T^k_{ij} = (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j$
等价于$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

黎曼联络的存在唯一

Theorem

任一光滑黎曼流形上存在唯一一个与度量相容且对称的联络。称其为黎曼联络。或$Levi$-$Civita$联络。

Proof.

联络的表示：利用$X\langle Y,Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$;
$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, 可得
$\langle\nabla_X Y, Z\rangle =$
$\frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle)$
$\boxed{\text{唯一性:}}$ 因为以上等式右边不依赖于联络。
$\boxed{\text{存在性:}}$ 局部表示：$g_{ij} = \langle E_i, E_j\rangle, \nabla_{E_i}E_j = \Gamma^k_{ij}E_k$, 坐标基表示李括号为零。
$\Gamma^l_{ij}g_{lm} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})$; $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{km}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})$
容易有以上公式构造黎曼联络。 □

测地线

测地线局部存在唯一定理。

Definition (指数映射EXP)

定义切向量集合$\epsilon = V \in T_pM$,满足存在测地线$r_V : [0,1] \to M$,$r'(0) = V$.
定义：指数映射$Exp : \epsilon \to M$,$Exp(V) = r_V(1)$.

任一点存在正规邻域，使得Exp是微分同胚。对应有正规坐标卡。

Definition (曲线长度)

光滑曲线$r : I \to M$，定义 $L(r) = \int_a^b |r'(t)|dt$为曲线的长度。
给出流形上的一个距离函数:$d(x,y) = \min_r L(r) : r(0) = x, r(1) = y$.

- 任一黎曼流形由距离函数定义成为度量空间。
- 两点间最短曲线是测地线。
- 测地线是局部最短曲线。

曲率

流形的几何形状：

Definition (曲率张量)

定义: $R : \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \to \mathcal{T}M$, 满足
$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$.
注意：有的书本定义为以上的负号。

Remark

- R是$(1,3)$型张量。特别可以定义$(0,4)$型张量 $R(x,y,z,w) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle$.称为黎曼曲率张量。
- 截面曲率:$sec(X,Y) = R(X,Y,X,Y)$,完全决定黎曼曲率张量
- $Ricci$曲率：$Ric(X) = \sum_{Y_j} sec(X,Y_j)$
- 数量曲率：$Scal(p) = \sum_X Ric(X) = 2\sum_X\sum_Y sec(X,Y)$.

曲率决定流形的拓扑结构，黎曼几何的主要内容。