信号处理的数学方法
aka 数字信号与图像处理

Mathematical Methods in Signal Processing

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

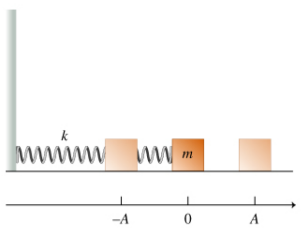
数学与系统科学学院，北京航空航天大学
School of Mathematics and Systems Science, Beihang University

March 9, 2012

Chapter 2: 信号与系统的数学表示I
Representation of signals and systems

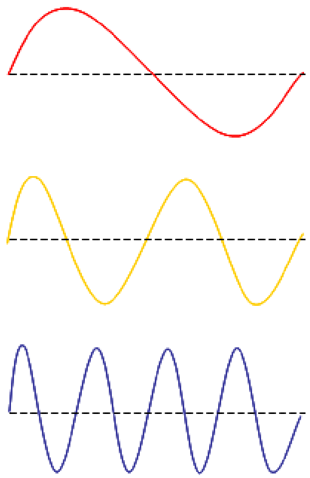
阅读章节：北航教材 1.1-1.3，1.6，2.1-2.3;2.5-2.8;
参考书：Elias Stein, 傅立叶分析导论.
Gasquet and Witomski,傅立叶分析和应用。
张旭东等： 离散随机信号处理，清华大学出版社。2005

简单调和振动



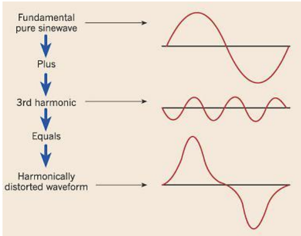
- Hooke定理：$F=-ku$
- Newton定理：$F=ma=m\ddot{u}$
- 方程 $m\ddot{u}=-ku$
- 解：$u(t)=A\cos(ct-\phi)$,称其中$c=\sqrt{k/m}$为频率,A为振幅,ϕ为相位。
- A和ϕ由初值决定。
- 有外力f的振动方程求解？$m\ddot{u}+ku=f$ 参考非齐次线性方程求解(齐次解+特解).
- 一条线上多个节点的简单振动？产生类似冲浪的效果：水上下振动，人平行波动。

一维波方程



- Newton定理：$F=ma=\rho h\ddot{y}(t)$
- 方程 $\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\tau\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,简化可取$\rho/\tau=1$
- 解一：D'Alembert
  $u(x,t)=F(x+t)+G(x-t)$.
- 解二：分离变量 $u=\mu(t)\nu(x)$,
  $\frac{\ddot{\mu}(t)}{\mu(t)}=\frac{\ddot{\nu}(x)}{\mu(x)}=\lambda$
  $\ddot{\mu}(t)-\lambda\mu(t)=0, \ddot{\nu}(x)-\lambda\nu(x)=0$
  $u(x,t)=(A_m\cos mt+B_m\sin mt)\sin mx$,
  $\lambda=m^2$.
- $m=1$基调 fundamental tone，$m=2$ 第一overtone(第二 harmonic），…

波的叠加与傅立叶级数



- 一般解 $u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}(A_m \cos mt + B_m \sin mt)\sin mx$.
- 初值条件 $u(x,0) = f(x), u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0$. 存在解$\leftrightarrow$ $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$
- 存在解的必要条件 $A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$.
- 推广到$[-\pi,\pi]$,奇函数 $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx$, 偶函数$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos mx$,
- 任一函数$F(x) = f(x) + g(x)$, 是否$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{\imath mx}$?

傅立叶的远见:

Joseph Fourier(1768-1830)

Question:
任意一个连续或不连续的函数是否可以表示为一列连续(光滑)函数的和?

Answer:
D'Alembert, Euler: 不一定!
J.Fourier: 一定!

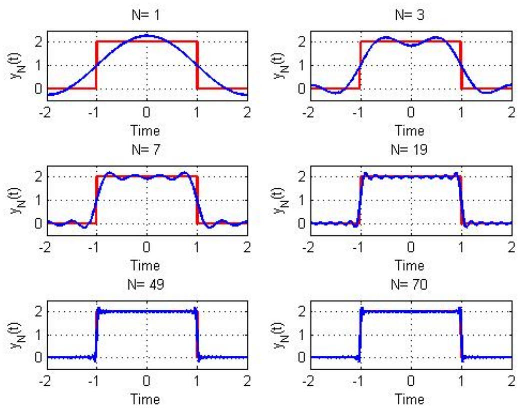
Remark
Joseph Fourier: 参与拿破仑的埃及远征; 发现温室效应。

周期函数的傅立叶级数

Definition
给定f是$[a,b]$上可积函数, $L = b - a$,则
f的第n个傅立叶系数为$\widehat{f(n)} = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)e^{-2\pi\imath nx/L}dx$
f的傅立叶级数为$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{\imath 2\pi nx/L}$
相关问题:

1. 任一信号都有傅立叶级数吗? L^2
2. 任一函数是信号吗? $f(x) = x^2$? 声音听不出来;
3. 傅立叶级数可以很好逼近信号吗?
   傅立叶分析的重要缺陷: Gibbs现象,在间断点处, 傅立叶级数永远不可能逼近期望值; 大约上下各0.09的误差。
   经典例子: 方波$SW(t) = 4/\pi(\sin t + \sin 3t/3 + \sin 5t/5 + \dots)$

Gibbs 现象



傅立叶级数的收敛问题

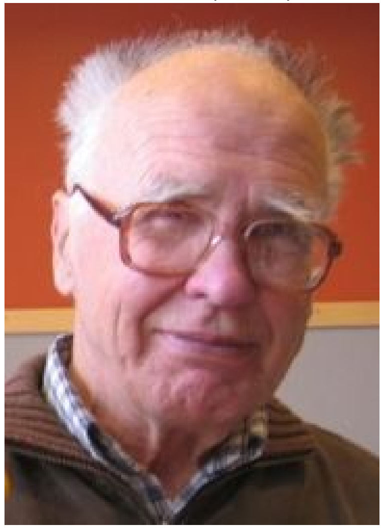
主要问题:
记部分和$S_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{\imath 2\pi nx/L}$. $S_N(x)$在怎样意义下收敛到$f(x)$?
前提：傅立叶系数有意义要求f是绝对可积!
收敛性：(与函数可微性有关)Why?

1. 点点收敛。Dirichlet条件：L^1,有限间断点，有限极值。
2. 平方可积收敛L^2。当$N\to\infty$， $\int_a^b |S_N(x)-f(x)|^2dx\to 0$.
3. 一致收敛(uniformly)：如果f是两次连续可微, 利用$\hat{f}'(n)=\imath n\hat{f}(n)$，$S_N(x)\rightrightarrows f(x)$.

唯一性：$f(x)$连续，且$\forall n, \hat{f}(n)=0$,则$f\equiv 0$.

历史注记

Lennart Carleson(1928-)



Theorem (点收敛, Carleson 1966)
任意一个平方可积函数(L^2)的傅立叶级数几乎处处收敛。

- Richard Hunt推广到$L^p, p>1$.
- Kolmogorov(1903-1987)构造一个绝对可积(1924)函数的傅立叶级数处处不收敛。
- Kahane,Katznelson：任一零测度集，存在一个连续函数在上面的傅立叶级数处处不收敛。

信号的空间

主要问题: 物理理想信号的数学对象?

- 线性空间V：$C(a,b)$
  存在线性无关基(Hamel basis)
- 线性赋范空间: $|v|$ 满足三角不等式； L^p;
  完备的线性赋范空间: Banach 空间
- 线性内积空间: $<V,W>$ (正定矩阵）, 比如L^2;
  完备的线性内积空间:（可数基) Hilbert空间;
  存在可数正交基;

Hilbert空间与积

Definition (积: $\langle x,y\rangle$)
满足

1. $\langle x,x\rangle\geq 0,\quad \langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$
2. $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$
3. $\langle \lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$, $\langle x+y,w\rangle=\langle x,w\rangle+\langle y,w\rangle$

诱导范数:$||x||=\langle x,y\rangle$.
Hilbert空间:线性积空间且范数定义的极限是完备的(巴拿赫空间)。

Definition (正交基)
*Hilbert*空间的一组基e_i称为正交基：如果满足$|e_i|=1, <e_i,e_j>=0$.
柯西许瓦茨不等式

$$\langle x,y\rangle^2\leq\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

能量有限的信号空间：L^2, l_2

能量有限的信号：$E(f) = \int f(x)^2 dx < \infty, f(x) \in L^2$.
或者离散信号 $E(f(n)) = \sum f(n)^2, f(n) \in l^2$。

Theorem (L^2的正交基)

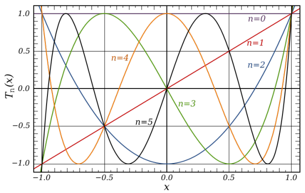
$e_n(x) = e^{inx}$是$L^2(0, 2\pi)$的一组正交基，
且傅立叶级数是最佳逼近$||f - S_N(f)|| \leq ||f - \sum_n c_n e_n||$
特别它是完备正交基。*(存在一致逼近)*

Theorem (平方可积收敛)

$f \in L^1(a, b)$, 当$N \to \infty$, $\int_a^b |S_N(x) - f(x)|^2 dx \to 0$.
有*Parseval*等式$\sum_n |\hat{f}_n|^2 = ||f||^2$.
特别有*Riemann-Lebesgue* 定理：$|n| \to \infty, \hat{f}(n) \to 0$.

注记：一般考察Hilbert空间有可数个完备正交基，是有限维欧几里德空间的最佳推广。

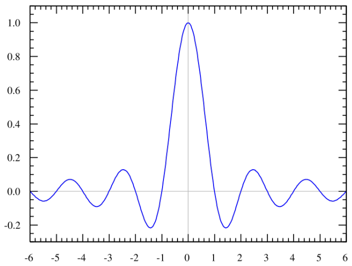
L^2的正交基



- 多项式基正交化：$t^i : i = 1, 2, ... \to$ Legendre多项式 $\frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$.
- (左边图)切比雪夫多项式 Chebyshev $T_n(t) = \cos(n \arccos t), n = 0, 1, 2, ... -1 \leq t \leq 1$
- Bessel 函数：来源于二维对称振动方程(鼓)．$r^2 B'' + rB' + \lambda r^2 B = n^2 B$
  其中$B(r)$的沿轴向的振动，r是半径，λ是鼓的频率，n是Bessel函数的阶。
  一般Bessel函数记为$J_n(\lambda_k r)$.

典型信号

- 指数信号$x(t) = Ae^{bt}, b \in C$
  周期信号：(正弦与余弦信号)
- 单位信号：单位矩形信号$G_1(t)$(方波脉冲)，单位阶跃信号$u(t)$(方波($SW(t)$))，单位斜变信号$R(t)$(三角波)
  关系:$R(t) = \int u(t)$.
- 特殊信号：抽样信号$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$,
  MATLAB: *sinc*函数。



δ函数

单位冲激信号的不同定义：

1. 方波的导数：$\delta(t) = SW'(t) = 4/\pi(\cos t + \cos 3t + \cos 5t + \dots)$.
   不收敛!
2. 在一点的力:$u'' = \delta(t)$,方程的解为$u(t) = -R(t - a) + ct + d$;
   参见：Green函数。由不同δ函数的解可以得到$u'' = f$的通解!
3. 狄拉克定义：$\int \delta(t)dt = 1, \delta(t) = 0, t \neq 0$.
   抽样特性$\int \delta(t - t_0)x(t) = x(t_0)$.
4. 线性泛函：$\delta : H \to R$, $\delta(f(t)) = f(0)$.
5. 函数逼近： 方波脉冲的逼近；$\delta(t) = \lim_{s \to \infty} \frac{G_s(t)}{s}$
   高斯函数的逼近。

信号空间及其运算

Definition (复$L^2(0,2\pi)$空间及三角函数基)

信号函数$f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, 记三角函数基为e^{int}, 积$<f,g>=\int_0^{2\pi}f(t)\overline{g(t)}dt$, 则能量有限的信号$f$组成一个希尔伯特空间。$f$的傅立叶级数展开记为$\sum c_k e^{int}$.

信号的运算：信号变换后还是信号?

- 线性运算(线性空间)
- 平移：$f(t)\to f(t-h)$; 信号延迟
- 反射：$f(t)\to f(-t)$; 信号颠倒
- 伸缩：$f(t)\to af(at)$；信号放大；
- 乘积: $f(t)g(t)$: 信号调频；
- 微分与积分：$f(t)\to f',\int f$???
- 卷积：$f(t)*g(t)$???

信号变换：正交变换

Definition (希尔伯特空间的正交变换)

定义线性变换$A:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$,满足$<Af,Ag>=<f,g>$，即保持积不变，称为 希尔伯特空间上的一个正交变换。

任意两组正交基的不同表示得到一个正交变换；

注：$f(t)$展开成傅立叶级数是$L^2\to l^2$的一个线性映射(正交？)

常见变换：

- 平移算子: $T_h(f(t))=f(t-h)$?
- 反射算子：$R(f(t))=f(-t)$；?
- 伸缩算子：$S_a(f)=af(at)$；?
- 乘积算子: $M_g(f)=f(t)g(t)$, 卷积算子：$C_g(f)=f*g$?
- 微分与积分算子：$D(f)=f',I(f)=\int f$?

傅立叶变换: 非周期函数的正交变换

一般的信号非周期函数,
怎样定义$\hat{f}(n)\simeq\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-inx}dx$? 前提：$f$在无穷大时，应该快速收敛到零(比如$1/x^2$).

Definition (Schwartz 空间：$\mathcal{S}(\mathbb{R})$)

其中的函数f无穷次可微且所有导数快速递减,
$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^k|f^{(l)}(x)|<\infty$, *for every* $k,l\geq 0$.

EXAMPLE (高斯函数和bump functions)

$K_\sigma(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}e^{-\pi x^2/\sigma}$. $f(x)=e^{-\frac{1}{x-a}}e^{-\frac{1}{b-x}}, a<x<b$

注记：$\mathcal{S}$是线性空间，对微分和多项式乘法封闭。

Schwartz 空间傅立叶变换

Definition (傅立叶变换)

$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$

Proposition

1. 平移 $f(x+h)\to\hat{f}(\xi)e^{2\pi ih\xi}$
2. 放大 $f(\lambda x)\to\lambda^{-1}\hat{f}(\lambda^{-1}\xi)$
3. 微分 $f'(x)\to 2\pi\imath\xi\hat{f}(\xi)$
4. 卷积 $(\widehat{f*g})(\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

Theorem (傅立叶变换是$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上的线性变换.)

若$f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，则$\hat{f}(\xi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$,特别高斯函数变到本身。

Schwartz 空间傅立叶变换是正交变换

Definition (傅立叶逆变换)
记傅立叶变换$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$,
则傅立叶逆变换$\mathcal{F}^*(g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi$

Proposition

1. 乘积公式 $\int_{-\infty}^{\infty} f\hat{g}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}gdt$
2. 逆定理$\mathcal{F}^*\mathcal{F}(f) = f$:
   即 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}dx$
3. *Plancheral* 定理：$\|\hat{f}\| = \|f\|.\|$为L_2范数。
4. *** *Poisson* 求和公式。$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi ixn}$,特别$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$。

傅立叶变换: Schwartz空间到L^2空间

关键结果：

1. Schwartz 空间在$L^2(R)$中稠密；
2. 傅立叶变换$\mathcal{F}$是Schwartz 空间上的正交(可逆)变换；$< f, g > = < \hat{f}, \hat{g} >$
3. $\mathcal{F}$存在从Schwartz 空间到完备空间$L^2(R)$的扩张。

Theorem (L^2空间的傅立叶变换)
$\mathcal{F}$给出$L^2(R)$上的一个正交*(*等距*)*变换。

1. $\hat{\hat{f}} = f$;
2. $< f, g > = < \hat{f}, \hat{g} >$
3. $||f|| = ||\hat{f}||$

注记：可以进一步推广到广义函数(线性泛函).

海森堡不确定原理: 傅立叶分析的局限

Theorem (海森堡不确定定理)
设$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \|f\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2dx = 1$,有

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2f^2(x)dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2\hat{f}^2(\xi)d\xi\right) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

仅当$f(x) = Ae^{-Bx^2}, B = A^4\pi/2$时等号成立。

Remark (物理解释:位置不确定性×动量不确定性$\geq \frac{h}{16\pi^2}$)

- 原子位于$[a, b]$的概率为$\int_a^b \psi^2dx$.
- 原子的位置是期望$x_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x\psi^2dx$, 位置的方差是$\int_{-\infty}^{\infty}(x - x_0)^2\psi^2dx$
- 对应有原子的动量分布为$\int_a^b \hat{\psi}^2dx$和方差.

系统与算子

系统H是一个函数空间的算子(或变换)。$H : x(t) \to y(t)$
常见信号运算都是算子。
常见系统：

- 线性系统: $H(ax + by) = aH(x) + bH(y)$
  连续算子?
- 时不变系统: $H(x(t - k)) = y(t - k)$
  信号处理对象→ 线性时不变算子：LTI系统!
- 稳定系统：BIBO稳定系统 $x(t)$有界则$y(t)$有界;
- 因果系统: $y(t_0)$依赖$x(t), t \leq t_0$. 即系统不能预测。
- 例子:有限差分方程$\sum_i a_iy(t - i) = \sum_j b_jx(t - j)$
- ***再抽样算子: $S(x(n)) = x(nP), P \in N$
  是否是因果系统?

卷积

Definition (卷积与周期卷积)

给定$f,g\in L^2$, 定义卷积$f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)dx$;
特别如果f,g是周期2π可积函数, 则定义周期卷积
$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)g(x-y)dx$

注记：卷积即小学的多位整数乘法(不进位!)

- 卷积满足线性，交换律，结合律。
- $f*g$是连续的，且$\widehat{f*g}(n)=\hat{f}(n)\hat{g}(n)$.
- 微分与积分：$D(f)*I(g)=f*g$.(周期函数)
- 傅立叶级数的收敛判定：记部分和$S_N(x)=(f*D_N)(x), D_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}e^{\imath nx}=\frac{\sin(2N+1)x/2}{\sin(x/2)}$称为狄利克雷核，还有Fejer,Abel,Gauss核。

连续信号LTI系统的模型

Remark

傅立叶王国：一般的能量信号可以看成$L^2(0,2\pi)$或$L^2(R)$的函数。 更广义的:能量信号属于一个*Hilbert*空间。
线性时不变系统*(LTI)*:是*Hilbert*空间的一个线性算子且与平移算子可交换。

Theorem (LTI系统基本结论)

线性时不变系统$\mathcal{H}$完全由单位冲激信号$\delta(t)$的冲激响应$h(t)$决定。 且$\mathcal{H}(x(t))=h(t)*x(t)$。*(所有LTI是个卷积系统).*

L^2有很多正交基，对应的有不同的正交分解，为什么用三角函数基? 为什么用傅立叶变换?

Theorem (LTI系统特征向量)

三角函数基是所有线性时不变系统$\mathcal{H}$的公共特征向量。

单位冲激信号与LTI系统的卷积解释***

- δ_0是一个线性泛函(可能无界!)。$<\delta_0,x(t)>=x(0)$
是否有Riesz 表示定理? $<\delta_0,x(t)>=<z(t),x(t)>$
- 一般的函数表示有$x(t)=<\delta_{t-s},x(s)>$.
- 记$\mathcal{H}(x(t))=y(t)$,则
$y(t)=\mathcal{H}(<\delta_{t-s},x(s)>)=<\mathcal{H}(\delta_{t-s}),x(s)>$
- 一般的可以定义$<\mathcal{H}(\delta),x(t)>=<\delta,\mathcal{H}(x(t))>$
假设$\mathcal{H}(\delta)$是有界泛函!，由Riesz 表示定理。$<\mathcal{H}(\delta),x(t)>=<h(t),x(t)>$.
- 设$T_s(x(t))=x(t-s)$,则$H\circ T_s=T_s\circ H$.
特别$y(t)=<T_s(h(t)),x(s)>=<h(t-s).x(s)>=h(t)*x(t)$.

Remark

一般的$\delta(t)$看成广义函数*(distribution)*,可以求导，积分等。

指数函数是所有LTI系统的特征向量***

Theorem (有界正规算子的谱)

*Hilbert*空间上可以互相交换的对称*(*正规*)*算子族*(*至少存在一个有界算子*)*存在共同的特征向量。

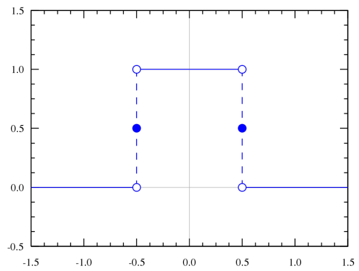
正规算子(normal operator): $N\circ N^*=N^*\circ N$ 其中$<Nx,y>=<x,N^*y>$。

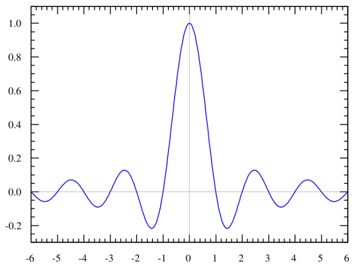
Corollary

所有的*LTI*系统是卷积系统.卷积可以交换,且与平移算子T_s可交换, 所以存在一组共同的特征向量。 特别有$h(t)*e^{ist}=H(s)e^{ist}$.

- 卷积算子可交换$h_1*h_2*x=h_2*h_1*x$
- 卷积与平移算子T_s可交换;
- 满足$h*e=\lambda e$, $T_s(e)=t_se$,仅有指数函数满足该方程!
- 直接验证$h(t)*e^{ist}=H(s)e^{ist}$。

简单信号：矩形波





- 作为周期函数的矩形波:$G_2(t)=1$,周期$T=2\pi$
  傅立叶展
  开$G_2(t)=\frac{1}{\pi}+\sum_n 2/\pi Sinc(n)\cos nt$.
- 傅立叶展开的复数形式:
  $G_2(t)=\frac{1}{\pi}+\sum_n \frac{1}{\pi}Sinc(n)e^{-int}$
- 作为有限区间函数的矩形波:$G_2(t)=1$。
  傅立叶变换$\widehat{G_2}(w)=2Sinc(w)$.
- 特别傅立叶系数$F_n=\widehat{G_2}(nw)/(2\pi)$

广义信号***

Remark (广义信号的傅立叶变换)
一般的C_c^∞上的线性泛函称为分布(*distribution*).看作可积函数定义的泛函的推广。 称为广义函数。
广义函数的傅立叶变换：对任何函数$x(t)\in S$,
$<\widehat{f},x(t)>=<f,\widehat{x(t)}>$

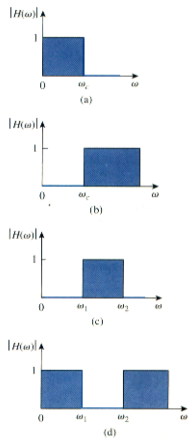
- 复指数信号$x(t)=e^{-at}u(t)$
  傅立叶变换 $X(w)=\frac{1}{a+iw}$
- 符号函数$sign(t)=\lim_{a\to 0}e^{-at}$
  傅立叶变换 $SIGN(w)=\frac{2}{iw}$.
- 单位冲激函数$\delta(t)$,$\widehat{\delta}=1$
  特别$\widehat{1}=2\pi\delta(t)$.
- 单位阶跃函数$u(t)=1/2+sign(t)$,
  $\widehat{u(t)}=\pi\delta(w)+\frac{1}{iw}$.

LTI系统

LTI系统完全由$h(t)$决定。

- 卷积的线性,与平移交换 $\to$ 线性时不变
- $h(t)=0,t<0\to$ 因果系统;
- $\int|h(t)|<\infty\to$ BIBO稳定系统;
- 频率响应:记$H(w)=\widehat{h(t)}$,则输出信号频率$Y(w)=H(w)X(w)$
  称$|H(w)|$为幅度频率响应; $arg(H(w))$为相位频率响应。
- 一般经典信号系统主要应用于频率的处理，称为模拟滤波器。
  分类:低通(lowpass),高通(highpass),带通(bandpass),带阻(bandstop),全通(allpass)等。

理想滤波器及实现



- 全通系统(无失真)的频率响应:$H(w)=Ae^{-iwT_d}$,
  A是频率, T_d是群延时。
- 理想低通滤波器的频率响应:
  $H(w)=G_{2w_c}(w)e^{-iwT_d}$
- 注意: $h(t)=\frac{w_c}{\pi}Sinc(w_c(t-T_d))$ 不是因果系统，所以不能实现!
  而且是无穷函数，一般用有理多项式逼近。
- 常见模拟滤波器:
  Butterworth滤波器:$|H(\omega)|^2=\frac{1}{1+B^2\omega^{2n}}$
  切比雪夫滤波器:$|H(\omega)|^2=\frac{1}{1+\epsilon^2C_n^2(\omega)}$
  椭圆滤波器:$|H(\omega)|^2=\frac{1}{1+\epsilon^2U_n^2(\omega)}$

真实世界的信号处理

真实信号=理想信号+噪音信号=$x(t)+e(t) \to h(n) \to x(t)$ 恢复信号

- 真实信号：包含不确定性，不可完全预期其值。
  信号表示：(离散)随机过程。含时间变量的随机变量$x(t,\xi)$
  理想信号：函数空间表示；L^2
  噪音信号: 最简单是白噪音随机过程(完全不可预期);
  常见噪音: 电线交流电噪音60赫兹，图像的椒盐噪音等等;
- 统计信号处理: 信号的平均的统计特征是确定的,可以利用数据统计量估计信号的统计特征。
  主要内容： 信号分析(谱估计)
  信号滤波(线性滤波Wiener滤波器，最小二乘，自适应滤波，Kalman滤波).
  应用:语音处理，去噪，信号预测，识别等。

随机变量

Remark (随机变量)

- 概率空间：$(X,\mathcal{S},P)$
- 随机变量是一个映射: $x: X \to R$, 使得 $\{x(\xi)<a\}$是个事件(可测集);
- CDF分布函数：$F_x(a)=Pr(x(\xi)<a)$ PDF密度函数 $f_x(a)=F'(a)$

Remark (随机向量)

- M维随机向量：$\bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_M)$
- CDF分布函数：$F_{barx}(\bar{a})=Pr(x_i(\xi)<a_i, 1\le i\le M)$
  PDF联合密度函数 $f_x(a)=\partial x_1\dots\partial x_M F(a)$
- 边际密度函数：$f_{x_i}=\int\dots\int f_x(a)dx_1\dots dx_{i-1}dx_{i+1}\dots dx_M$.
  独立随机变量： $f_{x_1,x_2}(a,b)=f_{x_1}(a)f_{x_2}(b)$

随机变量的特征

Remark (统计特征)

- 期望:$E(x)=\mu_x=\int_{-\infty}^{\infty} af_x(a)da$
- 方差：$\sigma_x^2=Var(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(a-\mu_x)^2 f_x(a)da$
  标准方差：σ_x;
- moments: $r^m=E((x-\mu_x)^m)=\int_{-\infty}^{\infty}(a-\mu_x)^m f_x(a)da$ 高阶矩。
  三阶矩：*skewness* 倾斜率，四阶矩： *kurtosis* 峰度
  特征函数： $\Phi_x(s)=E(e^{xs})=\int f_x e^{sa}da$

EXAMPLE

- 均匀分布:$f_x(t)=1/(b-a), a\le t\le b$, $\mu_x=(b+a)/2$, $\sigma_x=(b-a)^2/12$
- 高斯分布：$f_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$

相关矩阵

Remark (随机向量统计特征)

- 期望向量：$\mu_x=(\mu_1,\dots,\mu_M)$
- 自相关矩阵: $R_x=E(\bar{x}(\xi)\bar{x}'(\xi))=[r_{ij}]$
  自协方差矩阵： $\Gamma_x=E(x-\mu_x)(x-\mu_x)'=\gamma_{ij}=R_x-\mu_x\mu_x'$
- 互相关矩阵: $R_{xy}=E(\bar{x}(\xi)\bar{y}'(\xi))=[r_{ij}]$
  互协方差矩阵：
  $\Gamma_{xy}=E(x-\mu_x)(y-\mu_x)'=\gamma_{ij}=R_{xy}-\mu_x\mu_y'$

Proposition (相关性)

x,y是不相关的如果$\Gamma_{xy}=0$
x,y是正交的，如果$R_{xy}=0$
x,y是独立的，如果$f_{x,y}(a,b)=f_x(a)f_y(b)$

离散随机过程

Definition (离散随机过程)

给定样本空间$X = \{\xi_k\}$,取一系列数$x(n, \xi_k)$称为离散随机过程或离散随机序列。
固定n, $x(n, \xi_k)$是一个随机变量；固定ξ_k, $x(n, \xi_k)$是一个样本序列；

Proposition (描述)

- 联合概率分布：$F(x_1, \ldots, x_M; n_1, \ldots, n_m) = Pr(x(n_i) \leq x_i, 1 \leq i \leq M$
- 统计特征:$\mu(n) = E(x(n))$, $\sigma(n)$;
- 自相关矩阵：$r(n_1, n_2) = E(x(n_1)x(n_2)$
  自协方差矩阵：$\gamma(n_1, n_2) = r(n_1, n_2) - \mu(n_1)\mu(n_2)$

IID：互相独立的随机过程； 不相关过程；正交过程：周期过程；

平稳随机信号

随机过程$x(n)$与$x(n+k)$的统计量相同。

Definition (SSS严格平稳信号)

如果联合分布密度函数满足：任何k成立
$f(x_1, \ldots, x_M; n_1, \ldots, n_m) = f(x_1, \ldots, x_M; n_{1+k}, \ldots, n_{m+k})$
p阶矩平稳(与时间无关),一般$p = 2$

Definition (WSS宽平稳信号)

随机信号满足,

1. $\mu(n) = \mu_x$
2. $var(x(n)) = \sigma_x^2$
3. $r_x(n_1, n_2) = r(|n_1 - n_2|) = r(k)$,称为自相关序列。

平稳信号自相关序列

Proposition

- $r_x(0) = \sigma_x^2 + |\mu_x|^2 \geq r_x(k)$
- $r_x(k) = r_x^*(-k)$
- 非负定 $\sum_k \sum_m a_k r(k-m) a_m^* \geq 0$

Remark (其他平稳条件*)**

- 渐进平稳:$x(n) \sim x(n+k), k \to \infty$
- 增量平稳:$x(n) - x(n+k)$平稳;
- 遍历性:有限时间的平均统计的极限等于期望值
  $E(x(n)) = \lim_N \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} x(i)$
  $E(x(n)x^*(n-k)) = \lim_N \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} x(i)x^*(i-k)$

功率谱

Definition (功率谱密度)

已知平稳信号$x(n)$的自相关序列$r(k)$，定义随机过程的功率谱*PSD*: $S(e^{i\omega})$为$r(k)$的*(*离散时间*)*傅立叶变换。称为功率谱密度。
有离散时间傅立叶逆变换可以得到$r(k)$.
****Z*变换*: $S(z) = \sum_n r(k) z^{-k}$
注记:一般信号的离散时间傅立叶变换(频率谱)是随机非平稳的白噪声!

Proposition

- 功率谱密度周期为2π的实函数;
- 非负定 $S(e^{i\omega}) \geq 0$
- 信号的平均功率:$P(x[n]) = E(x^2[n]) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{i\omega}) d\omega$

白噪声：$w(n) \sim WN(\mu, \sigma^2)$
$r(k) = \sigma^2 \delta(k)$, $S(e^{i\omega}) = \sigma^2$.

典型例子

EXAMPLE

$x(n) = A\cos(w_0 n + \phi) + v(n)$,其中$A$是正常数，$\phi$是$[0, 2\pi]$上均匀分布随机变量，$v(n)$服从独立的高斯分布$N(0, \sigma^2)$.

计算有:

$E(x(n)) = 0$

$r(n_1, n_2) = \frac{1}{2}A^2\cos(w_0(n_1 - n_2))$.

特别自相关矩阵是Toeplitz矩阵!

$S(w) = \sigma^2 + 2\pi A^2 \sum \delta(w - w_0 - 2\pi k)$

MATLAB 编程：信号的生成和显示

信号生成:

- 时间抽样信号：$t = linspace(-\pi, \pi, 1001)$
- 一般函数信号: $sin(t)$...
- 一般周期：$square(), sawtooth(), gauspuls(), chirp()$
- 特殊信号：冲激信号$pulstran()$,抽样信号$sinc()$;

信号表示

- 时间域：$plot(t, x(t))$
- 频率域：$y = fft(x); y = fftshift(y)$;
  可以画 $abs(y), real(y), imag(y)$;
- 周期谱图：$periodogram(x)$;
- 光谱图：$spectrogram(x)$;

本章深入学习问题

附上相关问题以便课程期末报告选择:

- L^2空间的其他正交基;
- Gibbs现象(数学解释及高维情形)
- δ函数的严格定义及其在微分方程中的应用(Green 函数);
- Schwarz空间上的傅立叶逆定理(傅立叶变换的逆变换是其本身).
- 海森堡测不准定理;
- 常见模拟滤波器的实现;