EXERCISE THREE

*5/23*课堂交。带***选做

1. 证明李导数与外导数的对偶定理。设E_i为光滑流形上的局部标架场，δ^i为对应的局部余标架场。设李导数满足 $[E_j, E_k] = c^i_{jk}E_i$，对应有外导数$d\delta^i = -c^i_{jk}\delta^j \wedge \delta^k$.

   ***证明：李导数与内乘可交换。

2. 证明

   (a) 可定向流形的开子流形是可定向的。

   (b) 如果M是两个可定向的开子流形的并集，且两个开子流形的交集是连通的，则M是可定向的。

   (c) 设M, N是可定向流形，证明:$F: M \to N$是保定向的映射当且仅当它在任一对定向相容的光滑坐标卡下表示的Jacobi矩阵的行列式大于零。

3. 给定R^3上2-形式$\Omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.

   (a) 计算Ω在球坐标(ρ, ϕ, θ)下的表示；

   (b) 计算$d\Omega$在球坐标和欧氏坐标下的表示；说明它们是同一个3-形式。

   (c) 计算诱导在球面上的2-形式$\Omega|_{S^2} = i^*\Omega$,其中$i: S^2 \to R^3$. 用球面坐标$(\phi, \theta)$表示。

   (d) 说明：$\Omega|_{S^2}$处处不为零。进而S^2是可定向流形。

4. 给定$R^3 \backslash \{0\}$上2-形式$\Omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$.

   (a) 利用局部坐标卡直接计算单位球面上的积分$\int_{S^2(1)} \Omega = 4\pi$;

   提示：取球面坐标表示(ϕ, θ),球面由两个坐标卡覆盖。$D_1 = [0, \pi] \times [0, \pi]$,$D_2 = [0, \pi] \times [\pi, 2\pi]$.

   (b) 计算任一半径为r的球面上的积分有$\int_{S^2(r)} \Omega = 4\pi$.

5. 给定(M, g)可定向黎曼流形，证明以下局部坐标卡公式：

   (a) *** $\operatorname{div}(X^i \partial x_i) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(X^i \sqrt{\det g})$

   (b) *** $\triangle f = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial f}{\partial x^j})$

   (c) 特别对于n维欧几里德空间的标准度量，给出其公式。

6. 给定(M, g)为紧致的可定向黎曼带边流形，设N是边界上的单位外法向量场。 证明

   (a) 任意光滑函数f,向量场X,有 $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \operatorname{grad} f, X \rangle_g$

(b) (分部积分)
$\int_M \langle \operatorname{grad} f, X\rangle_g dV_g = \int_{\partial M} f\langle X, N\rangle d\tilde{V_g} - \int_M f \operatorname{div} X dV_g$

(c) (Green 公式) 任意光滑函数u, v,
$\int_M u\triangle v dV_g = \int_M \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle_g dV_g - \int_{\partial M} uNv d\tilde{V_g}$

(d) 说明当M连通且边界为空时，调和函数($\triangle u = 0$)都是常数。且所有特征根($\triangle u = \lambda u$)为非负。